



Paridad de riesgo y diversificación en portafolios de inversión

Risk parity and diversification in investment portfolios

Carlos Andres Zapata Quimbayo^{1*}, Robinson Alexander García Gaona²

¹Universidad Externado de Colombia, Colombia

²Corporación Universitaria Minuto de Dios, Colombia

Recibido el 6 de octubre de 2023; aceptado el 22 de febrero de 2024

Disponible en Internet el: 27 de febrero de 2024

Resumen

El modelo de paridad de riesgo (PR) para la construcción de portafolios de inversión ofrece una alternativa valiosa y robusta frente al modelo media-varianza (MV) de Markowitz. En este trabajo se propone un marco de aplicación del enfoque de PR para dos portafolios diferentes: i) para el mercado de valores estadounidense y; ii) para un portafolio internacional con participación en los mercados desarrollados y emergentes en el que se incorporan México y Brasil. Para ello, introducimos una explicación de los fundamentos del enfoque de PR y de las estrategias de inversión basadas en PR. Luego, en la implementación del enfoque para los dos portafolios, se resaltan las limitaciones del modelo MV para el diseño de estrategias de inversión diversificadas, dado sus problemas de concentración y bajo desempeño. Además, se acompaña el ejercicio con métricas de concentración como el índice de Herfindahl-Hirschman (HHI) permitiendo confirmar la consistencia de los portafolios de PR al reducir su rebalanceo.

Código JEL: C61, D81, G11

Palabras clave: portafolio óptimo; paridad de riesgo; diversificación

* Autor para correspondencia

Correo electrónico: carlosa.zapata@uexternado.edu.co (C. A. Zapata Quimbayo).

La revisión por pares es responsabilidad de la Universidad Nacional Autónoma de México.

<http://dx.doi.org/10.22201/fca.24488410e.2025.5238>

0186- 1042/© 2019 Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Contaduría y Administración. Este es un artículo Open Access bajo la licencia CC BY-NC-SA (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>)

Abstract

The Risk Parity (RP) model for optimal portfolios provides a valuable and robust alternative to the Markowitz's Mean-Variance (MV) model. In this paper, we propose a framework to apply RP approach for two different portfolios: i) for the U.S. stock market and ii) for an international portfolio with both developed and emerging markets, which includes Mexico and Brazil. To do that, we introduce an explanation of the fundamentals of the RP approach and PR-based investment strategies. In that sense, we apply the RP approach for the two portfolios, and we highlight the limitations of the MV model to construct diversified investment strategies given its problems of concentration and poor performance. Additionally, we extend the analysis with concentration metrics like the Herfindahl-Hirschman Index (HHI), allowing the consistency of the PR portfolios to be confirmed by reducing their rebalancing.

JEL Code: C61, D81, G11

Keywords: optimal portfolio; risk parity; diversification

Introducción

El modelo media-varianza (MV) formulado por Markowitz para la construcción de portafolios diversificados, aunque sigue vigente hoy en día, presenta algunas limitaciones prácticas que han llevado al surgimiento de enfoques alternativos basados en métodos heurísticos (Quian, 2005; Choueifaty y Coignard 2008, DeMiguel et al., 2009; Maillard et al., 2010; Roncalli y Weisang, 2016, entre otros). Estos enfoques han permitido superar los problemas de baja diversificación (o de alta concentración) y el bajo desempeño que presentan los portafolios MV, dada su alta sensibilidad y fuerte dependencia de los parámetros estimados con información histórica, como fue señalado por Michaud (1989), Michaud (1998), Black y Litterman (1992), Chopra y Ziemba (1993), entre otros.

El enfoque de paridad de riesgo (PR) o risk parity, introducido por Qian (2005), se diferencia del modelo MV de Markowitz al tomar en cuenta la contribución de cada activo al riesgo total del portafolio. Para ello, este enfoque busca que cada activo contribuya de forma igualitaria al riesgo total del portafolio (Roncalli, 2014; Roncalli y Weisang, 2016), es decir, la PR busca que cada activo o clase de activo contribuya con la misma cantidad al riesgo del portafolio. Bajo esta noción, la PR viene determinada por la medida de contribución al riesgo (CR), ya que ayuda a entender cómo cambian las características de riesgo del portafolio cuando se ajustan los pesos de los activos. Por lo tanto, la PR hace parte de la familia de enfoques heurísticos para la optimización de portafolios¹, como afirman Maillard et al. (2010), Roncalli (2014) y Roncalli y Weisang (2016).

¹ Garlappi et al. (2007) y DeMiguel et al. (2009) proporcionaron varios enfoques heurísticos para la optimización de portafolios que difieren de la PR.

La PR también representa un enfoque de asignación de riesgos, como fue señalado por Maillard et al. (2010) y Roncalli (2014). Según los autores, la PR permite descomponer el riesgo en componentes sistemáticos e idiosincráticos, lo cual lleva a un proceso de presupuestación de riesgos. Como resultado, la PR ayuda mejorar la diversificación del portafolio y, con ello, genera un mejor desempeño, al tiempo que reduce la dependencia del modelo a las estimaciones de los parámetros de retorno esperados y covarianzas.

A nivel internacional es amplia la literatura sobre los desarrollos formales y aplicaciones del enfoque de PR, así como el estudio de sus ventajas y bondades, frente a los modelos tradicionales como el modelo MV de Markowitz (Fabozzi et al., 2021). Luego de la introducción del enfoque de PR por Qian (2005), Maillard et al. (2010) presentaron soluciones numéricas generales para construir portafolios de PR. Roncalli y Weisang (2016) implementaron ejercicios de optimización para construir portafolios de PR a partir de la identificación de factores de riesgo o risk budgeting. Además, Feng y Palomar (2015) formularon un algoritmo que resuelve de forma secuencial utilizando una aproximación convexa de primer orden al problema de PR original no convexo.

Estos desarrollos fueron acompañados con el trabajo previo de Lohre et al. (2012), quienes analizaron fuentes de riesgo no correlacionadas de los activos que componen el índice S&P 500 a través del análisis de componentes principales (PCA). En este trabajo, los autores presentaron un método de construcción de portafolios más diversificados que permiten alinear la contribución de los componentes principales al riesgo total de la inversión.

Por otra parte, se encuentran algunas extensiones del enfoque de PR en los trabajos de Bruder et al. (2022), Costa y Kwon (2020), Bellini et al. (2021), entre otros. Bruder et al. (2022) recomendaron la incorporación de la asimetría en el portafolio de PR, en lugar de la volatilidad, mientras que Bellini et al. (2021) sugirieron una estrategia de PR basada en expectiles, como medida de paridad en lugar de la volatilidad. Por su parte, Costa y Kwon (2020) presentaron una reformulación general mucho más robusta del enfoque de PR mediante la introducción de conjuntos de incertidumbre elipsoidales y el uso de técnicas de minimización del error de estimación para los retornos. Además, se identifican otras extensiones del enfoque en Chakravorty et al. (2019) y Lee y Sohn (2023), para el diseño de estrategias de inversión. Chakravorty et al. (2019) diseñaron estrategias de inversión activas a partir de esquemas de presupuestación de riesgos, mientras que Lee y Sohn (2023) extendieron el enfoque de PR para combinar estrategias de inversión con factores de estilo.

En este trabajo se revisan estos avances en el enfoque de PR y se propone un esquema sencillo de aplicación para portafolios con diferentes características. Para ello, se implementa en modelo de PR para: i) un portafolio de inversión tomando activos del mercado de valores estadounidense tomando como referencia el índice Dow Jones Industrial Average (DJI) y; ii) para un portafolio internacional con

participación de los índices representativos de los mercados de Estados Unidos (DJI), Reino Unido (FTSE), México (MXX) y Brasil (BVSP). Para ambos portafolios, se realiza una comparación con los resultados del enfoque tradicional del modelo MV de Markowitz tomando diferentes medidas como: retorno esperado, volatilidad, coeficiente de Sharpe. Además, se incluyen análisis de concentración de los portafolios utilizando el índice de Herfindahl-Hirschman (HHI). El trabajo contribuye a la literatura internacional sobre el enfoque PR para la gestión de portafolios de inversión, tanto en los mercados desarrollados como en los emergentes.

Este trabajo está organizado en cinco secciones incluyendo esta introducción. En la segunda sección se presentan los desarrollos del modelo MV para la construcción de portafolios óptimos. Luego, se introduce el enfoque de PR, teniendo en cuenta sus fundamentos y diferentes formulaciones. En la cuarta sección se realiza la implementación de los modelos y se realizan algunas comparaciones de los resultados para los dos portafolios propuestos. Luego, se presentan algunas implicaciones prácticas del enfoque de PR. Finalmente, se muestran las conclusiones y extensiones del trabajo.

Construcción de portafolios óptimos y modelo MV de Markowitz

Markowitz (1952, 1959) formuló el modelo MV al considerar el valor esperado de los retornos de los activos ($\mu \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) y la matriz de covarianzas ($\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$) como insumos al del portafolio conformado por activos riesgosos. Si el retorno esperado del portafolio viene determinado por $\mu_p = w' \mu$, con varianza es igual a $\sigma_p^2 = w' \Sigma w$, con $w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ que denota el vector de pesos (o participaciones porcentuales) de los activos, tal que $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$, entonces, el problema de optimización viene dado por:

$$\min_{\{w\}} \{w' \Sigma w\} \quad \text{s. a. } w' \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad w' \mu = \mu_0 \quad (1)$$

Donde: $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ denota un vector de unos y μ_0 representa el retorno esperado del portafolio con menor riesgo. El problema de optimización de Markowitz, bajo el supuesto de que los retornos de los activos siguen una distribución normal, se resuelve al minimizar la medida de riesgo del portafolio (σ_p^2) para un nivel dado de retorno esperado (μ_0). Este problema también puede incorporar la restricción en los pesos negativos, es decir, $w \geq 0$, si las ventas en corto están prohibidas en el mercado. El problema de optimización del modelo MV se resuelve como un problema de programación cuadrática (QP, por sus siglas en inglés).

Esta formulación de Markowitz sentó las bases para un análisis más profundo de la construcción óptima de portafolios que permite incorporar otras restricciones al problema de optimización, o incluso, reformularse para otras medidas de riesgo como la semivarianza (Sortino y Price, 1994), la medida del valor en riesgo (VaR, por sus siglas en inglés) o el valor en riesgo condicional (CVaR) (Uryasev y Rockafellar, 2001; Rockafellar y Uryasev, 2002). Sin embargo, este modelo tiene muchos problemas, como fue señalado por Michaud (1998), Best y Grauer (1991) y Black y Litterman (1992), entre otros. Por ejemplo, al utilizar solo datos históricos para la estimación de μ y Σ no incorpora adecuadamente la incertidumbre de los parámetros estimados, lo cual genera soluciones muy sensibles. Además, el modelo MV genera portafolios óptimos que en la práctica presentan una alta concentración en pocos activos, es decir, portafolios muy concentrados.

El enfoque de paridad de riesgo (PR)

Contribución al riesgo y formulaciones básicas

El enfoque de paridad de riesgo (PR) o risk parity fue introducido por Qian (2005)² y desarrollado formalmente por Maillard et al. (2010) y Qian (2011). A diferencia del enfoque MV de Markowitz, que busca minimizar la varianza del portafolio para un nivel de retorno esperado, el enfoque de PR permite construir un portafolio de inversión en el que todos los activos aportan la misma cantidad (o proporción) al riesgo total del portafolio, es decir, todos los activos contribuyen de forma igualitaria al riesgo del portafolio.

La PR surge como una alternativa al modelo MV para construir portafolios “mejor” diversificados, como afirman Fabozzi et al. (2021), ya que considera la contribución al riesgo que tiene cada activo (CR_i) en el portafolio de inversión. Como la CR_i viene determinada por $w_i \frac{\partial \sigma}{\partial w_i}$, entonces, siguiendo a Maillard et al (2010) y Wu et al. (2020), la contribución de todos los activos al riesgo del portafolio, medido por su desviación estándar σ_p , se obtiene mediante³:

² Aunque el término risk parity fue acuñado por Qian (2005), el origen de la paridad de riesgo se remonta a la década de los 90s, cuando el fondo de inversión Bridgewater lanzó el primer fondo de paridad de riesgo bajo el nombre de All-Weather Fund. Esta estrategia estaba basada en una asignación de paridad con ponderaciones de los activos proporcionales a su volatilidad inversa. Posteriormente, Qian (2005) y Maillard et al. (2010) desarrollaron una definición formal de la paridad de riesgo que incorpora correlaciones de activos basados en la medida de contribución al riesgo total. Ver Rocanlli (2014) y León y Zapata (2023), para más detalles.

³ Algunas extensiones de este enfoque se encuentran para las medidas de riesgo a la baja o downside risk, como el valor en riesgo (VaR) o el CVaR. Ver Boudt et al. (2013) y Haugh et al. (2017), para más detalles.

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i}$$

(2)

De esta forma, para un conjunto n de activos, un portafolio de contribución igualitaria al riesgo es el portafolio en el que cada activo tiene la misma contribución al riesgo, es decir, la paridad del riesgo debería satisfacer:

$$w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = w_j \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_j} \quad \forall i, j$$

(3)

Para obtener el portafolio de PR se encuentran diferentes formulaciones, como afirman Qian (2006) y Maillard et al (2010). La primera formulación fue desarrollada por Qian (2005, 2006) y se conoce como PR *naive* (PRn), también denominada *pseudo-PR*, ya que representa la forma más simple de paridad. Los pesos de los activos que conforman el portafolio de PRn se obtienen como proporción de la relación inversa del riesgo de cada activo medido por las desviaciones estándar, como muestra la ecuación (3).

$$w = \frac{\sigma^{-1}}{\mathbf{1}'\sigma^{-1}}$$

(4)

En otras palabras, la PRn consiste en sub ponderar intuitivamente los activos más riesgosos o de mayor volatilidad y en sobre ponderar los de menor riesgo. Aunque esta es una solución simple, tiene el inconveniente de ignorar las covarianzas de los activos, la cual es fundamental para estimar el riesgo total del portafolio. Como alternativa, surge la PR vanilla (PRv) o también conocida como paridad de fuentes de riesgo, como afirman Maillard et al. (2010) y Roncalli (2014). Si la medida de riesgo es la volatilidad del portafolio, y de forma análoga a lo indicado en la ecuación (3), se tiene $w_i(\Sigma w)_i = w_j(\Sigma w)_j$, entonces, el portafolio de PRv se obtiene al resolver las raíces del polinomio descrito en la ecuación (5).

$$w_i(\Sigma w)_i = b_i w' \Sigma w$$

(5)

En esta formulación se introducen un conjunto de restricciones factibles \mathcal{W} , como $1'w = 1$ y $w \geq 0$, de tal forma que $w \in \mathcal{W}$, donde:

$$\Sigma w = b/w \tag{6}$$

Como sugieren Maillard et al. (2010), el problema descrito en la ecuación (6) se puede resolver usando métodos numéricos. Ellos proponen el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\{w\}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i(\Sigma w)_i - w_j(\Sigma w)_j)^2 \quad \text{s. a. } w \in \mathcal{W} \tag{7}$$

Como el problema indicado en (7) minimiza las diferencias al cuadrado entre las CR de todos los pares de activos, entonces, para un portafolio de contribución igualitaria factible, el valor óptimo de la función es cero. A partir de esta formulación se encuentran soluciones alternativas en Roncalli (2014), Feng y Palomar (2015), Roncalli y Weisang (2016), Wu et al. (2020), entre otros, quienes emplean métodos alternativos. Además, como la PR solo considera la medida de riesgo del portafolio, puede verse como un enfoque orientado a la gestión de riesgos, como afirman Qian (2011) y Roncalli (2014), y permite crear portafolios mejor diversificados que el modelo MV de Markowitz, es decir, la PR puede verse como un enfoque de asignación frente a las diferentes fuentes de riesgo del portafolio o risk budgeting.

Además, la relación riesgo-retorno del modelo MV puede ajustarse para obtener un portafolio de inversión que alcance el mayor grado de diversificación. Bajo esta noción, Choueifaty y Coignard (2008) desarrollaron la medida de máxima diversificación (MD) que depende únicamente de la volatilidad del portafolio. La medida de MD es definida de forma análoga a la medida de Sharpe bajo la noción de que el retorno del portafolio está relacionado directamente de forma proporcional a su volatilidad. Esta redefinición de la relación riesgo-retorno permite extender aún más este enfoque de PR.

Implementación del modelo y análisis de resultados

En esta sección, se implementa en modelo de PR para la construcción de un portafolio de inversión: i) en el mercado de valores estadounidense tomando como referencia el índice Dow Jones Industrial Average (DJIA) que está conformado por las 30 compañías industriales más importantes y representativas del

mercado bursátil de Estados Unidos⁴ y; ii) para un portafolio internacional con participación en los mercados de Estados Unidos (DJIA), México (MXX), Brasil (BVSP) y Reino Unido (FTSE)⁵. Para ambos portafolios, se realiza una comparación con los resultados del enfoque tradicional del modelo MV de Markowitz, tomando diferentes medidas como: retorno esperado, volatilidad (o desviación estándar), coeficiente de Sharpe. Además, se incluyen análisis de concentración de los portafolios utilizando el índice HHI.

Datos utilizados

El modelo de PR se implementa para los dos portafolios propuestos con el objetivo de mostrar las ventajas del enfoque de diversificación para mercados con diferentes características. Además, se toma como periodo de análisis el periodo comprendido entre enero de 2010 hasta diciembre de 2022, tomando los precios de cierre ajustados de las acciones y de los índices representativos de cada mercado con periodicidad mensual.

En el primer caso, se implementa para el mercado de valores estadounidense y se toma como índice de referencia el DJIA (el benchmark)⁶. De esta lista de activos se toman las 15 compañías de mejor desempeño medido por el coeficiente de Sharpe⁷. La tabla 1 presenta las medidas de retorno esperado (promedio), volatilidad (desviación estándar) y el coeficiente de Sharpe para las acciones seleccionadas y el índice.

La tabla 1 permite verificar el buen desempeño que presentaron las compañías seleccionadas durante el periodo de análisis. Además, la tabla 2 presenta las mismas medidas para los índices que componen el portafolio internacional.

⁴ Este mercado se escoge con el propósito de reflejar las principales implicaciones del modelo MV. Dado que el DJIA está conformado solo las compañías industriales, las correlaciones (o covarianzas) de estas son elevadas. Por tanto, para un mercado con estas características, el modelo MV tiende a presentar problemas de alta concentración en la conformación óptima del portafolio.

⁵ La implementación se realiza en el software R. Los códigos y datos utilizados en esta aplicación están disponibles previa solicitud a los autores.

⁶ De la lista de compañías del DJIA se excluye DOW ya que no presenta información para todo el periodo de análisis. En la tabla A1 se presentan la descripción de las compañías seleccionadas.

⁷ El propósito de este filtro es para evitar aquellas compañías que han presentado un desempeño negativo o que presentan altas volatilidades, lo cual puede llevar a la construcción de portafolios MV muy concentrados. Al tomar la muestra completa de compañías del DJIA, la solución óptima del portafolio MV alcanza un número alto de compañías excluidas.

Tabla 1
 Parámetros de los activos – mercado DJIA

| Activos | Retorno esperado | Volatilidad | Coef. de Sharpe |
|---------|------------------|-------------|-----------------|
| AAPL | 0.0193 | 0.0785 | 0.2456 |
| AMGN | 0.0117 | 0.0635 | 0.1841 |
| HD | 0.0173 | 0.0607 | 0.2854 |
| HON | 0.0130 | 0.0585 | 0.2225 |
| JNJ | 0.0089 | 0.0434 | 0.2051 |
| KO | 0.0077 | 0.0489 | 0.1684 |
| MCD | 0.0116 | 0.0444 | 0.2608 |
| MRK | 0.0103 | 0.0504 | 0.1967 |
| MSFT | 0.0149 | 0.0621 | 0.2405 |
| NKE | 0.0136 | 0.0702 | 0.1930 |
| PG | 0.0084 | 0.0419 | 0.1998 |
| TRV | 0.0105 | 0.0548 | 0.1922 |
| UNH | 0.0195 | 0.0551 | 0.3546 |
| V | 0.0150 | 0.0582 | 0.2583 |
| WMT | 0.0082 | 0.0511 | 0.1597 |
| DJIA | 0.0047 | 0.0331 | 0.1417 |

Fuente: calculos propios

Tabla 2
 Parámetros de los mercados

| Índices | Retorno esperado | Volatilidad | Coef. de Sharpe |
|---------|------------------|-------------|-----------------|
| DJIA | 0.0047 | 0.0331 | 0.1417 |
| MXX | 0.0017 | 0.0323 | 0.0515 |
| BVSP | 0.0019 | 0.0504 | 0.0380 |
| FTSE | 0.0013 | 0.0285 | 0.0453 |

Fuente: calculos propios

Resultados para el portafolio del mercado de Estados Unidos; DJIA

Los portafolios óptimos MV, PR naive y PR vanilla se construyen siguiendo las formulaciones indicadas atrás tomando solo posiciones largas ($w \geq 0$). Los resultados de los pesos óptimos de estos portafolios se muestran en la figura 1. Los resultados confirman las diferencias significativas en la composición de los portafolios del modelo MV y del modelo de PR naive (PRn) y vanilla (PRv). Allí, se resalta la menor diversificación del portafolio MV, en el que no solo se identifica una alta participación de un solo activo (PGT), sino que se excluyen cinco activos (AAPL, AMGN, HD y V), aunque se resalta la reducida participación de activos como NKE y KO. Por su parte, los portafolios PRn y PRv presentan una composición mucho más homogénea, sin excluir a ningún activo. Esto permite comprobar la mayor diversificación que se encuentra en los portafolios de PR.

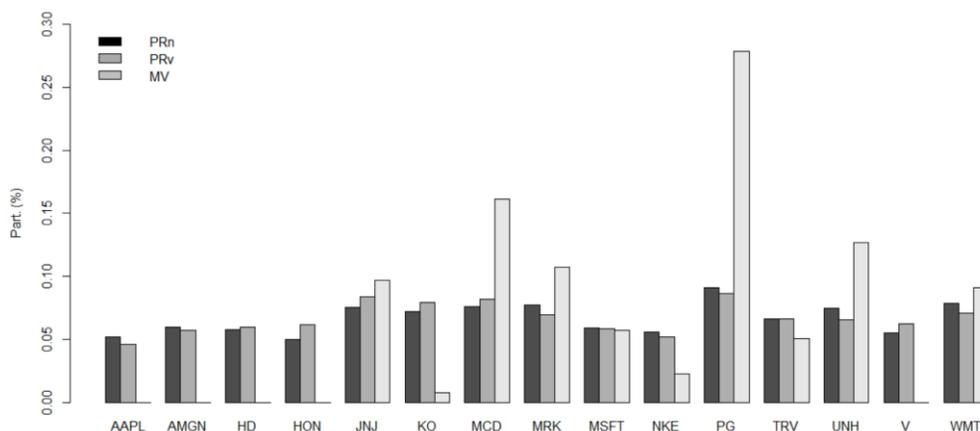


Figura 1. Pesos óptimos de los portafolios MV y PR

Fuente: elaboración propia

Por otra parte, en materia de desempeño, se identifica una mejora notable en los resultados de los portafolios de PR (PRn y PRv), respecto al portafolio MV y al índice DJIA, como muestran la tabla 3 y la figura 2. En primer lugar, para el periodo de análisis se encuentran mayores retornos esperados y un mejor retorno ajustado por riesgo, medido por el coeficiente de Sharpe, para los dos portafolios de PR.

Tabla 3
 Resultados de los portafolios óptimos y del índice DJIA

| | PRn | PRv | MV | DJIA |
|------------------|--------|--------|--------|--------|
| Retorno: | 0.0122 | 0.0123 | 0.0111 | 0.0047 |
| Volatilidad: | 0.0347 | 0.0345 | 0.0318 | 0.0331 |
| Coef. de Sharpe: | 0.3518 | 0.3561 | 0.3508 | 0.1417 |
| No. Activos | 15 | 15 | 10 | 29 |

Fuente: calculos propios

La figura 2, que presenta el comportamiento histórico de los retornos acumulados para los portafolios óptimos y del DJIA, muestra un resultado mejor para los portafolios PR, aunque sin mayor diferencia para PRn y PRv. Estos resultados confirman las ventajas de los modelos de PR frente al modelo tradicional MV para la construcción de portafolios más diversificados y con mejor desempeño. Ahora bien, con el propósito de llevar a cabo un ejercicio mucho más robusto de verificación de los resultados y, que permitan mostrar la consistencia de los portafolios de PR, frente al portafolio MV, se realiza un ejercicio de rebalanceo mensual de los portafolios tomando una ventana móvil de 60 meses.

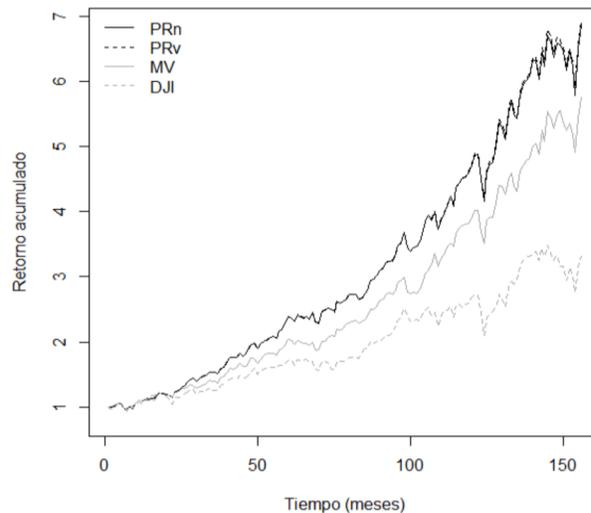


Figura 2. Retorno acumulado de los portafolios
Fuente: elaboración propia

Teniendo en cuenta las pequeñas diferencias que se presentan entre los portafolios PRn y PRv, para este ejercicio se toma solo el portafolio PRn. A partir de estos resultados se realiza nuevamente una evaluación de desempeño y de concentración para todos los portafolios. Como resultado se obtienen 85 actualizaciones de los portafolios para todo el periodo de análisis. La figura 3 muestra el proceso de rebalanceo o actualización en la composición de cada uno de los tres portafolios (MV, RP y RBP).

La figura 3 muestra los cambios frecuentes que presenta el portafolio MV, lo cual confirma el problema de sensibilidad que tiene este modelo frente a los parámetros estimados, como fue señalado atrás. Además, se identifica la exclusión de gran parte de los activos que componen el portafolio. En el caso del portafolio PRn, los cambios de un periodo a otro son mínimos o incluso nulos en algunos casos, lo cual confirma la mayor consistencia de este enfoque frente al modelo MV.

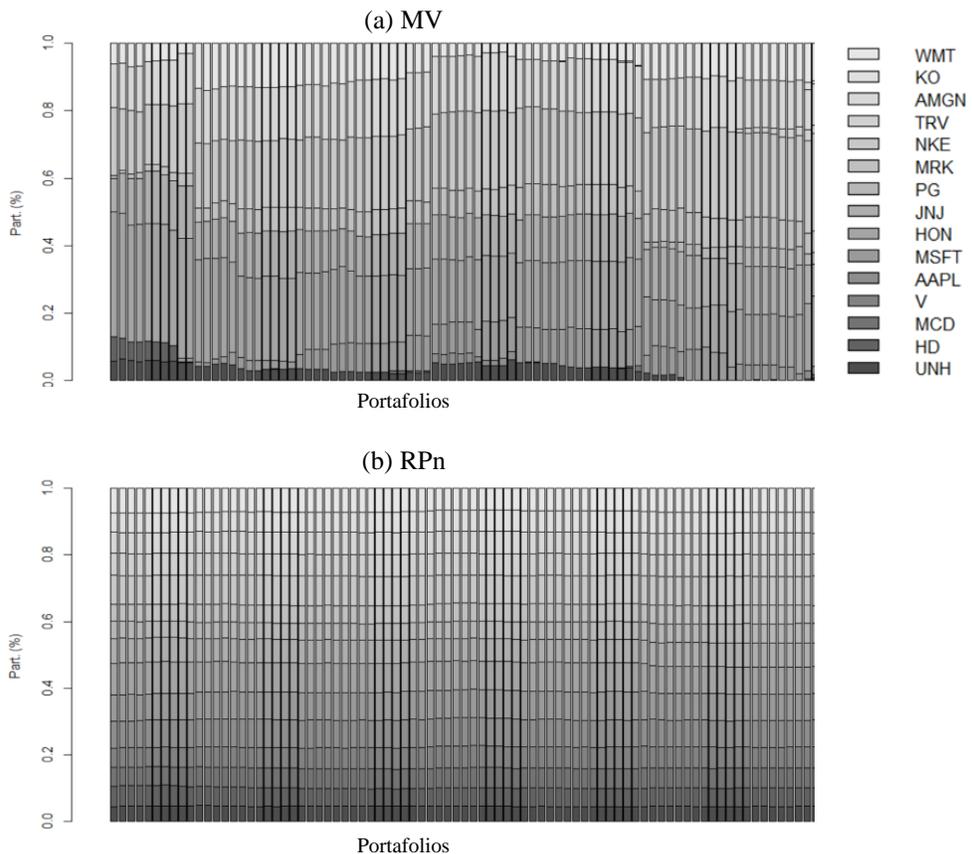


Figura 3. Rebalanceo de los pesos de los portafolios
Fuente: elaboración propia

La figura 4 muestra los cálculos de los retornos esperados y el coeficiente de Sharpe de los portafolios para cada actualización en todo el periodo de análisis. Allí se observa una ventaja notable para la medida de retorno esperado del portafolio PRn y un mayor coeficiente de Sharpe casi en todos los periodos.

Finalmente, esta consistencia de los portafolios de PR también se puede confirmar mediante el uso de un indicador de concentración. Para ello, se utiliza el índice HHI⁸, como sugieren León y Zapata

⁸ También se puede implementar una formulación alternativa usando el coeficiente de Gini, como sugieren Lohre, et al. (2012).

(2023) y Zapata et al., (2023), medido como la suma de los cuadrados de pesos de cada uno n activos que componen el portafolio:

$$HHI = \sum_{i=1}^n w_i^2 \tag{8}$$

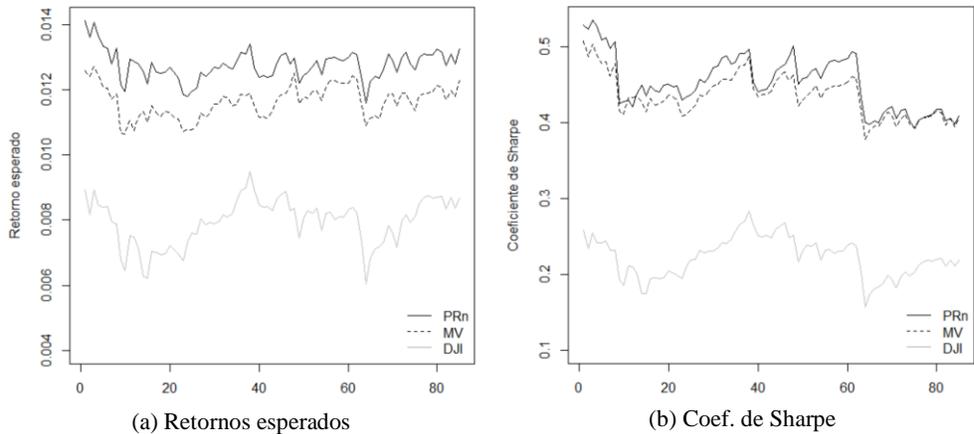


Figura 4. Desempeño de los portafolios en el rebalanceo

El índice HHI se calcula para todos los portafolios del ejercicio rebalanceo anterior. La figura 4 muestra el índice calculado para los 85 portafolios móviles. Mientras que el indicador HHI calculado para el portafolio PRn se encuentra alrededor de 690, este mismo indicador para el portafolio MV se encuentran entre 1500-2300 y presenta una alta sensibilidad, lo cual refleja los cambios fuertes que presenta su composición cuando cambia la muestra de datos.

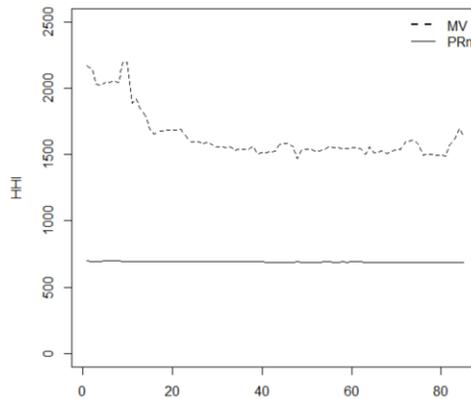


Figura 5. Índice HHI de los portafolios MV y PRn
 Fuente: elaboración propia

Resultados para el portafolio internacional; DJI, MXX, BVSP, FTSE

Los portafolios óptimos MV, PR naive y PR vanilla se construyen siguiendo la misma formulación anterior, pero ahora para un portafolio internacional que combina varios mercados. Los resultados en cuanto a la composición de los portafolios óptimos (pesos óptimos) y su desempeño, se muestran en la figura 6 y en la tabla 4.

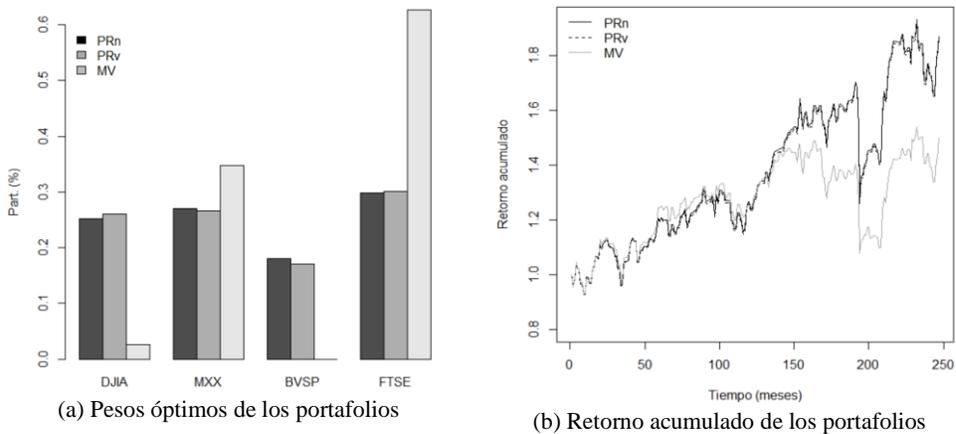


Figura 6. Resultados de los portafolios: composición y desempeño acumulado
 Fuente: elaboración propia

Tabla 4
 Resultados de los portafolios óptimos

| | PRn | PRv | MV |
|------------------|--------|--------|--------|
| Retorno: | 0.0024 | 0.0024 | 0.0015 |
| Volatilidad: | 0.0289 | 0.0290 | 0.0267 |
| Coef. de Sharpe: | 0.0823 | 0.0812 | 0.0565 |

Fuente: calculos propios

Nuevamente, los resultados confirman las diferencias significativas en la composición de los portafolios y la alta concentración que presenta el modelo MV, frente a las formulaciones alternativas PRn y PRv. Allí, se resalta la menor diversificación del portafolio MV, al encontrar una participación superior al 60% en el mercado FTSE, la exclusión de BVSP y una baja participación de DJIA. Además, en cuanto al desempeño histórico, los portafolios PR alcanzan un mejor resultado, como muestra la figura 6b y la tabla 4. Los portafolios PRn y PRv alcanzan mayores retornos esperados y coeficientes de Sharpe, a pesar de la fuerte caída que presentan todos ellos, la cual corresponde con el periodo de la pandemia del Covid-19. Estos resultados permiten verificar la ventaja del modelo de PR para la construcción de portafolios mejor diversificados y con mejor desempeño.

Además, al realizar el ejercicio de rebalanceo mensual de los portafolios, también se encuentran cambios sustanciales en el portafolio MV, como muestra la figura 7a. En las 85 actualizaciones de los portafolios para todo el periodo de análisis se observa la alta sensibilidad que experimentan todos los mercados, mientras que el rebalanceo de los portafolios PRn es mínimo.

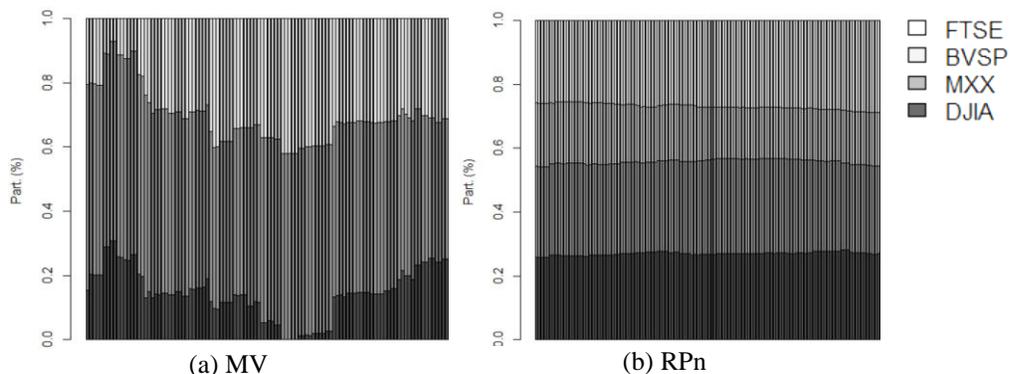


Figura 7. Rebalanceo de los pesos de los portafolios
 Fuente: elaboración propia

La figura 3 muestra los cambios frecuentes que presenta el portafolio MV, confirmando el problema de sensibilidad que tiene este modelo frente a los parámetros estimados, como fue señalado atrás, mientras que para el portafolio PRn los cambios de un periodo a otro son mínimos o incluso nulos.

Finalmente, para confirmar la mayor consistencia de este enfoque frente al modelo MV, la figura 8 muestra los cálculos el coeficiente de Sharpe de los portafolios para cada actualización o rebalanceo. Allí, se observa un mayor coeficiente de Sharpe en el portafolio PRn, con excepción de algunos meses al final del periodo de análisis. Así mismo, el índice HHI para los 85 portafolios móviles, al igual que en el portafolio anterior, presenta un menor grado de concentración para el portafolio PRn, en comparación con el portafolio MV. Mientras que para el portafolio PRn este indicador se encuentra por debajo de 2600 y presenta cambios muy pequeños, para el portafolio MV el indicador oscila entre 3500 y 5000.

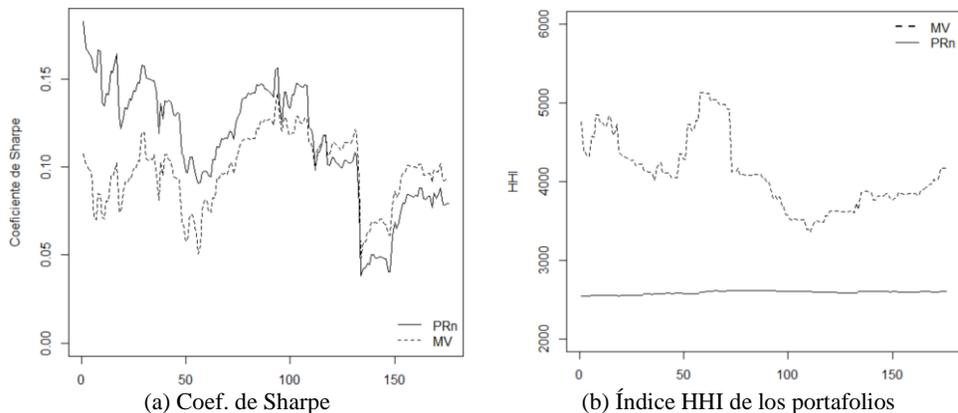


Figura 8. Desempeño de los portafolios en el rebalanceo e índice HHI

Discusión e implicaciones prácticas

El enfoque de paridad de riesgo (PR) representa un avance significativo sobre el modelo MV de Markowitz ya que no solo permite crear portafolios de inversión diversificados, sino que mejora se la gestión de riesgos de forma efectiva. Este resultado se logra mediante el uso de técnicas de optimización intuitivas, sencillas y fáciles de implementar. Además, al reducir la frecuencia de los rebalanceos, este enfoque les permite a los inversionistas mantener una estrategia consistente a largo plazo, lo cual puede ayudar a reducir los costos de transacción en el mercado. Esto sin duda poder representar una ventaja importante para profesionales dedicados a la gestión de inversiones.

Si bien estos resultados son comparables con los enfoques de optimización robusta de portafolios, el uso de métodos heurísticos puede generar algunas limitaciones que no se deben pasar por alto, como fue señalado por Feng y Palomar (2015) y Costa y Kwon (2020). Al implementar métodos heurísticos no se puede comprobar que la solución sea óptima (un óptimo global). Por tanto, la introducción de conjuntos de incertidumbre puede ayudar a robustecer aún más el enfoque. Sin embargo,

al incorporar este tipo de técnicas para robustecer el enfoque puede acarrear una complejidad matemática mucho mayor.

Conclusiones

En este trabajo se implementó el enfoque de PR para la construcción de portafolios óptimos de inversión, con el propósito de superar las diferentes limitaciones que presenta el modelo MV de Markowitz. Este nuevo enfoque de PR permitió construir un portafolio mucho más robusto para las dos aplicaciones propuestas y los resultados superan los problemas de sensibilidad y diversificación, los cuales suelen presentarse en el modelo MV. De esta forma, el enfoque de PR permite crear portafolios más consistentes ya que minimiza los rebalances a lo largo del periodo de tiempo analizado y, alcanza mejores niveles de diversificación y un mejor desempeño. Por lo anterior, el enfoque propuesto de PR ofrece ventajas importantes sobre el modelo MV de Markowitz y supera sus principales limitaciones.

La ventaja del modelo propuesto es que puede ser fácilmente replicado para diferentes mercados y clases de activos. En futuros trabajos se recomienda adoptar enfoques alternativos para incorporar la presupuestación de factores de riesgo o risk budgeting, ya que proporciona una visión integral de la atribución del riesgo en el portafolio. Así mismo, se recomienda evaluar la sensibilidad del enfoque frente a otras clases de activos, como commodities o títulos de renta fija. Estas extensiones pueden contribuir a los análisis que se derivan del enfoque de PR con diferentes clases de activos y, con ello, ofrecer importantes desarrollos para la industria financiera.

Referencias

- Bellini, F., Cesarone, F., Colombo, C., & Tardella, F. (2021). Risk parity with expectiles. *European Journal of Operational Research*, 291(3), 1149-1163. <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.10.009>
- Best, M., & Grauer, R. (1991). Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. *Management Science*, 37(8), 980-989. <http://doi.org/10.1287/mnsc.37.8.980>
- Black, F. y Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28-43. <http://doi.org/10.2469/faj.v48.n5.28>
- Boudt, K., Carl, P., & Peterson, B. G. (2013). Asset allocation with conditional value-at-risk budgets. *Journal of Risk*, 15(3), 39-68. <http://doi.org/10.21314/JOR.2013.258>
- Bruder, B., Kostyuchyk, N., & Roncalli, T. (2022). Risk parity portfolios with skewness risk: An application to factor investing and alternative risk premia. *arXiv preprint arXiv:2202.10721*. <http://doi.org/10.48550/arXiv.2202.10721>

- Chakravorty, G., Awasthi, A., Srivastava, S., Gupta, S., & Singhal, M. (2019). Active risk budgeting: a portfolio construction methodology for futures strategies. SSRN working paper. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3376062>
- Chopra, V. y Ziemba, W. (1993). The effects of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, 19(2), 6-11. <http://doi.org/10.3905/jpm.1993.409440>
- Choueifaty, Y., & Coignard, Y. (2008). Toward maximum diversification. *The Journal of Portfolio Management*, 35(1), 40-51. <http://doi.org/10.3905/JPM.2008.35.1.40>
- Costa, G., & Kwon, R. H. (2020). Generalized risk parity portfolio optimization: An ADMM approach. *Journal of Global Optimization*, 78, 207-238. <http://doi.org/10.1007/s10898-020-00915-x>
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F. J., & Uppal, R. (2009). A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. *Management science*, 55(5), 798-812. <http://doi.org/10.1287/mnsc.1080.0986>
- Fabozzi, F., Focardi, S., Kolm, P. y Pachamano, D. (2007). *Robust portfolio optimization and management*. John Wiley & Sons.
- Fabozzi, F. A., Simonian, J., & Fabozzi, F. J. (2021). Risk parity: The democratization of risk in asset allocation. *The Journal of Portfolio Management*, 47(5), 41-50. <http://doi.org/10.3905/jpm.2021.1.228>
- Feng, Y., & Palomar, D. P. (2015). SCRIP: Successive convex optimization methods for risk parity portfolio design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(19), 5285-5300. <http://doi.org/10.1109/TSP.2015.2452219>
- Garlappi, L., Uppal, R. y Wang, T. (2007). Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach. *The Review of Financial Studies*, 20(1), 41-81. <http://doi.org/10.1093/rfs/hhl003>
- Haugh, M. B., Iyengar, G., & Song, I. (2017). A generalized risk budgeting approach to portfolio construction. *Journal of Computational Finance*. 21(2), 29-60. <http://doi.org/10.21314/JCF.2017.329>
- Lee, T. K., & Sohn, S. Y. (2023). Alpha-factor integrated risk parity portfolio strategy in global equity fund of funds. *International Review of Financial Analysis*, 88, 102654. <http://doi.org/10.1016/j.irfa.2023.102654>
- León, B. & Zapata, C. (2023). *Gestión moderna de portafolio: una guía cuantitativa con aplicaciones en R y Python*. CESA - Colegio de Estudios Superiores de Administración.
- Lohre, H., Neugebauer, U., & Zimmer, C. (2012). Diversified risk parity strategies for equity portfolio selection. *The Journal of Investing*, 21(3), 111-128. <http://doi.org/10.3905/joi.2012.21.3.111>

- Maillard, S., Roncalli, T., & Teiletche, J. (2010). The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *Journal of Portfolio Management*, 36(4), 60–70. <http://doi.org/10.3905/jpm.2010.36.4.060>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91. <http://doi.org/10.2307/2975974>
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. New Heaven: Yale university Press.
- Michaud, R. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is optimization optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31-42. <http://doi.org/10.2469/faj.v45.n1.31>
- Michaud, R. (1998). *Efficient asset management: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation*. Oxford University Press.
- Qian, E. (2005). Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification. Panagora Asset Management, Technical Report. Disponible es: <https://www.panagora.com/assets/PanAgora-Risk-Parity-Portfolios-Efficient-Portfolios-Through-True-Diversification.pdf>
- Qian, E. (2006). On the financial interpretation of risk contribution: Risk budgets do add up. *Journal of Investment Management*, 4(4), 1-11. <http://dx.doi.org/10.2139/ssm.684221>. Consultado: 28/02/2024
- Qian, E. (2011). Risk parity and diversification. *The Journal of Investing*, 20(1), 119-127.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443-1471. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00271-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6)
- Roncalli, T. (2014). *Introduction to Risk Parity and Budgeting*. CRC Press.
- Roncalli, T., & Weisang, G. (2016). Risk parity portfolios with risk factors. *Quantitative Finance*, 16(3), 377-388. <http://doi.org/10.1080/14697688.2015.1046907>
- Sortino, F., & Price, L. (1994). Performance measurement in a downside risk framework. *The Journal of Investing*, 3(3), 59-64. <http://doi.org/10.3905/joi.3.3.59>
- Uryasev, S., & Rockafellar, R. T. (2001). Conditional value-at-risk: optimization approach. *Stochastic optimization: algorithms and applications*, 54, 411-435. http://doi.org/10.1007/978-1-4757-6594-6_17
- Wu, L., Feng, Y., & Palomar, D. P. (2020). General sparse risk parity portfolio design via successive convex optimization. *Signal Processing*, 170, 107433. <http://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.107433>
- Zapata, C., Carmona, D., & Gamboa, J. (2023). Optimal Portfolio Selection Using a Robust-Bayesian Model. En Figueroa, J., Hernández, G., Villa, J., Gaona, E. (Eds). *Applied Computer Sciences in Engineering* (pp. 70-79). Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-031-46739-4_7

Anexo

Tabla A1
 Lista de compañías del índice DJIA seleccionadas

| Símbolo | Nombre de la compañía | Sector |
|---------|------------------------------|-------------------------------|
| AAPL | Apple Inc. | Servicios tecnológicos |
| AMGN | Amgen Inc. | Servicios tecnológicos |
| HD | The Home Depot | Consumo minorista |
| HON | Honeywell International Inc. | Servicios tecnológicos |
| JNJ | Johnson & Johnson | Industria farmacéutica |
| KO | The Coca-Cola Company | Bebidas |
| MCD | McDonald's | Restaurantes de comida rápida |
| MRK | Merck Sharp & Dohme | Industria farmacéutica |
| MSFT | Microsoft Corporation | Servicios tecnológicos |
| NKE | Nike Inc. | Industria textil |
| PG | Procter & Gamble | Bienes de consumo |
| TRV | The Travelers Companies | Seguros |
| UNH | United Healthcare | Salud |
| V | Visa Inc. | Servicios financieros |
| WMT | Walmart | Consumo minorista |